



CORRIGE DE MATHEMATIQUE ENSP YAOUNDE 2006

Niveau 1



Exercice I

I- Calcul de la probabilité des évènements A et B

* $P(A)$

$$P(A) = \frac{C_5^1 \cdot C_4^3 \cdot C_4^0 \cdot C_4^1 \cdot C_{14}^{10} \cdot C_1^1}{C_{32}^{16}}$$

* $P(B)$

$$P(A) = \frac{C_5^1 \cdot C_{27}^{15}}{C_{32}^{16}}$$

II- Calcul de la probabilité pour chacune des six zones de fournir le vainqueur final de l'épreuve.

On sait que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

$$\Rightarrow p_0 + 4p_0 + \frac{3}{5}p_0 + \frac{8}{5}p_0 + 5p_0 + \frac{1}{5}p_0 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{62}{5}p_0 = 1$$

$$\Rightarrow p_0 = \frac{5}{62}$$

On en déduit les valeurs des probabilités des autres zones à partir des relations données dans le tableau.

❖ Amérique du sud

$$p_1 = 4p_0 \Rightarrow \boxed{p_1 = \frac{10}{31}}$$

❖ Asie

$$p_2 = \frac{3}{5}p_0 \Rightarrow \boxed{p_2 = \frac{3}{62}}$$

❖ Concafaf

$$p_3 = \frac{8}{5}p_0 \Rightarrow \boxed{p_3 = \frac{4}{31}}$$

❖ Europe

$$p_4 = 5p_0 \Rightarrow \boxed{p_4 = \frac{25}{62}}$$

❖ Océanie

$$p_5 = \frac{1}{5}p_0 \Rightarrow \boxed{p_5 = \frac{1}{62}}$$

Exercice II

$$(E_1): 2z^3 - z^2 + 5z + 3 = 0$$

$$(E_2): 2z^5 + z^4 + 6z^3 - 3z^2 - 2z - 1 = 0$$

1) Montrons que (E_1) et (E_2) vérifient (E_3) , (E_4) , (E_5)

$$-z^2 \times (E_1): -2z^5 + z^4 - 5z^3 - 3z^2 = 0$$

$$+ (E_2): 2z^5 + z^4 + 6z^3 - 3z^2 - 2z - 1 = 0$$

$$\underline{\hspace{10em}} \\ 2z^4 + z^3 - 2z - 1 = 0 \quad (E_3)$$

$$-z \times (E_1): -2z^4 + z^3 - 5z^2 - 3z = 0$$

$$(E_3): 2z^4 + z^3 - 2z - 1 = 0$$

$$\hline 2z^3 - 5z^2 - 5z - 1 = 0 \quad (E_4)$$

$$(E_1): 2z^3 - z^2 + 5z + 3 = 0$$

$$+ (E_4): 2z^3 - 5z^2 - 5z - 1 = 0$$

$$\hline 4z^2 + 10z + 4 = 0 \quad (E_5)$$

2) Trouvons les solutions communes de (E_1) et (E_2)

Pour cela résolvons $(E_5): 2z^2 + 5z + 2 = 0$

$$\Delta = 9 > 0 \Rightarrow z_1 = -2 \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{1}{2}$$

z_1 ne vérifie pas (E_3) et (E_4)

z_2 vérifie (E_3) et (E_4)

Donc la solution commune de (E_1) et (E_2) est $z_2 = -\frac{1}{2}$

3-a) Déduisons en toutes les solutions de (E_1)

On montre que

$$2z^3 - z^2 + 5z + 3 = 2\left(z + \frac{1}{2}\right)(z^2 - z + 3)$$

$$\text{D'où } (E_1) = 0 \Rightarrow z_2 = -\frac{1}{2}, \quad z_3 = \frac{1 - i\sqrt{11}}{2}, \quad z_4 = \frac{1 + i\sqrt{11}}{2}$$

$$\text{Les solutions de } (E_1) \text{ sont : } S = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1 - i\sqrt{11}}{2}, \frac{1 + i\sqrt{11}}{2} \right\}$$

b) Détermination des solutions de (E_2)

$$2z^5 + z^4 + 6z^3 + 3z^2 - 2z - 1 = 2\left(z + \frac{1}{2}\right)(z^4 + 3z^2 - 1)$$

Soit à résoudre l'équation $(z^4 + 3z^2 - 1) = 0$

Posons $Z = z^2 \Rightarrow Z^2 + 3Z - 1$

$$\text{D'où } Z_1 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{On déduit donc que } Z_5^2 = -\frac{3 + \sqrt{13}}{2} = i^2 \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{D'où } z_5 = i\sqrt{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}} \quad \text{ou} \quad z_5 = -i\sqrt{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}}$$

$$\text{De même } Z_6^2 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} = i^2 \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

$$\Rightarrow z_6 = i\sqrt{\frac{3 - \sqrt{13}}{2}} \quad \text{ou} \quad z_5 = -i\sqrt{\frac{3 - \sqrt{13}}{2}}$$

Les solutions de (E_2) sont :

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}; i\sqrt{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}}; -i\sqrt{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}}; i\sqrt{\frac{3 - \sqrt{13}}{2}}; -i\sqrt{\frac{3 - \sqrt{13}}{2}} \right\}$$

Exercice III

Utilisons l'intégration par parties pour calculer l'intégrale :

$$I = \int_{\sqrt{\pi/4}}^{\sqrt{\pi/2}} x^3 \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{\pi/4}}^{\sqrt{\pi/2}} x^2 \cdot 2x \cdot \sin x^2 dx$$

$$\text{Posons } U(x) = x^2 \Rightarrow U'(x) = 2x$$

$$V'(x) = 2x \sin x^2 \Rightarrow V(x) = -\cos x^2$$

L'intégrale devient :
$$I = \frac{1}{2} \left[\left[4x^2 \sin x^2 \right]_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} + \int_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2x \cdot \cos x^2 dx \right]$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \left[\left[4x^2 \sin x^2 \right]_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} + \left[\sin x^2 \right]_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \right]$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \left(\pi \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\pi + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right)$$

D'où

$$I = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{-4 + \sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{-4 + \sqrt{2}}{2} \right)$$

Exercice VI

Soit la fonction $f(x) = (x+1)e^{-\frac{4}{x}}$ ayant pour courbe représentative C_f et pour domaine de définition D_f

1) Calcul du domaine de définition et des limites aux bornes.

$$x \in D_f \Leftrightarrow e^{-\frac{4}{x}} \text{ existe, d'où } x \neq 0$$

$$D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

- Calcul des limites aux bornes de D_f .

❖ En $+\infty$

$$\text{Quand } x \rightarrow +\infty, -\frac{4}{x} \rightarrow 0 \Rightarrow e^{-\frac{4}{x}} \rightarrow 1 \Rightarrow (x+1)e^{-\frac{4}{x}} \rightarrow (x+1) \rightarrow +\infty$$

Ainsi
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

❖ En $-\infty$

Quand $x \rightarrow -\infty$, $-\frac{4}{x} \rightarrow 0 \Rightarrow e^{-\frac{4}{x}} \rightarrow 1 \Rightarrow (x+1)e^{-\frac{4}{x}} \rightarrow (x+1) \rightarrow -\infty$

Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$$

❖ En 0^-

Quand $x \rightarrow 0^-$, $-\frac{4}{x} \rightarrow +\infty \Rightarrow e^{-\frac{4}{x}} \rightarrow +\infty \Rightarrow (x+1)e^{-\frac{4}{x}} \rightarrow 1 \times e^{-\frac{4}{x}} \rightarrow +\infty$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty}$$

❖ En 0^+

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $-\frac{4}{x} \rightarrow -\infty \Rightarrow e^{-\frac{4}{x}} \rightarrow 0 \Rightarrow (x+1)e^{-\frac{4}{x}} \rightarrow 1 \times 0 \rightarrow 0$

Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0}$$

2) Etude des variations et dressage du tableau des variations de $f(x)$.❖ Variations de $f(x)$

$$f'(x) = \left(e^{-\frac{4}{x}} \right) + (x+1) \times \left(\frac{4}{x^2} \right) e^{-\frac{4}{x}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(e^{-\frac{4}{x}} \right) \times \left(\frac{4x+4+x^2}{x^2} \right) = \left(e^{-\frac{4}{x}} \right) \times \left(\frac{x+2}{x} \right)^2$$

$e^{-\frac{4}{x}}$ étant toujours positif pour tout x de D_f , le signe de $f'(x)$ est celui de $\left(\frac{x+2}{x}\right)$

qui est positif ou nul pour tout x de D_f . Il vient alors que $f'(x) > 0 \forall x \in D_f$. On conclut que f est croissante sur D_f .

❖ Tableau des variations f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

3) Points d'inflexion de C_f

- Montrons que C_f admet des points d'inflexion

C_f admet des points d'inflexion ssi $f''(x)$ s'annule aux abscisses de ces points.

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{4}{x^2} \left(\frac{x+2}{x} \right)^2 - \frac{4}{x^2} \left(\frac{x+2}{x} \right) \right) e^{-\frac{4}{x}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \left(\frac{4}{x^2} \left(\frac{x+2}{x} \right) \left(\frac{2}{x} \right) \right) e^{-\frac{4}{x}} = \frac{8}{x^4} (x+2) e^{-\frac{4}{x}}$$

Ce qui montre clairement qu'il existe bel et bien des (ou un) réels de D_f tels que $f''(x) = 0$. Par conséquent C_f admet donc des points d'inflexion.

- Détermination des points d'inflexion de C_f

Par résolution de l'équation $f''(x) = 0$, on obtient

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

$$f(x=-2)=-e^2$$

Donc C_f admet un point d'inflexion $A(-2; -e^2)$

4-a) Limite en 0 de $\frac{e^u-1}{u}$ quand $u \rightarrow 0$

$$\text{On a : } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u-1}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{e^u}{u} - \frac{1}{u} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1$$

Donc $\boxed{\lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1}$

b) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)e^{-\frac{4}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{4}{x}} = 1$$

D'où $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1}$

c) Montrons que C_f admet une asymptote à $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+1)e^{-\frac{4}{x}} - x \right] \quad \text{posons } u = -\frac{4}{x} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \left[\left(-\frac{4}{u} + 1 \right) e^u + \frac{4}{u} \right] \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \left[-\frac{4}{u} e^u + e^u + \frac{4}{u} \right] = \lim_{u \rightarrow 0} \left[-4 \left(\frac{e^u - 1}{u} \right) + e^u \right] = -3 \end{aligned}$$

Donc la droite (D) d'équation (D): $y = x - 3$ est asymptote oblique en $+\infty$ à C_f .

d) Montrons s'il y a lieu que C_f admet d'autres asymptotes.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \Rightarrow C_f$ admet une asymptote verticale à gauche de 0.

On montre également que $y = x - 3$ est asymptote oblique en $-\infty$ à C_f .

5°)a) Montrons que la fonction admet un prolongement par continuité à droite en 0.

On a d'après la question 1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. Autrement dit, la limite à droite en 0 de

$f(x)$ est finie. Donc on peut conclure que $f(x)$ admet un prolongement par continuité à droite de 0. Ce prolongement est défini par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ g(x) = f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

b) Montrons que $f(x)$ dérivable à droite en 0.

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \in \mathbb{R}$.

$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ admet donc une limite finie en 0 à droite, par conséquent est dérivable.

Conséquence: $f(x)$ est continue en 0^+ .

Tracé du graphe

EXERCICE V

$A(-3;4;0)$ et $B(1;-2;0)$. Soit $M(x; y; z)$ dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminons le lieu des points $\mathcal{P}$:

1) $\mathcal{E}_1 = \{M \in \mathcal{P} \text{ tel que le triangle ABM est rectangle en A}\}$.

$$\begin{aligned} \text{ABM triangle rectangle en A} &\Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AM} = 0 \Rightarrow 4(x+3) - 6(y-4) = 0 \\ &\Rightarrow 4x - 6y + 36 = 0 \end{aligned}$$

Donc $(\mathcal{E}_1)$ est le plan d'équation $2x - 3y + 18 = 0$

2) $\mathcal{E}_2 = \{M \in \mathcal{P} \text{ tel que le triangle ABM est rectangle en B}\}$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{BM} = 0 \Rightarrow 4(x-1) - 6(y+2) = 0 \Rightarrow 2x - 3y - 8 = 0$$

Donc $(\mathcal{E}_2)$ est le plan d'équation $2x - 3y - 8 = 0$

3) $\mathcal{E}_3 = \{M \in \mathcal{P} \text{ tel que le triangle ABM est rectangle en M}\}$

$$\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) + (y-4)(y+2) + (z-0)(z-0) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = (\sqrt{13})^2$$

Donc $(\mathcal{E}_3)$ est une sphère de centre $\Omega(-1; 1; 0)$ et de rayon $r_1 = \sqrt{13}$

4) $\mathcal{E}_4 = \{M \in \mathcal{P} \text{ tel que le triangle ABM est isocèle en M}\}$.

AMB triangle isocèle en M signifie que M appartient au plan méridien de [AB].

$$\text{On a donc } \vec{AM} \cdot \vec{\Omega M} = 0 \Rightarrow 4(x+1) + 6(y-1) = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 5 = 0$$

Où Ω représente ici le milieu de [AB].

Donc $(\mathcal{E}_4)$ est le plan d'équation $2x - 3y + 5 = 0$

5) $\mathcal{E}_5 = \{M \in \mathcal{P} \text{ tel que le triangle ABM est isocèle en A}\}$.

AMB triangle isocèle en A, cela signifie que $AM = AB = 2\sqrt{13}$

Donc $(\mathcal{E}_5)$ est une sphère de centre A, de rayon $r_2 = 2\sqrt{13}$ et ayant pour équation

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 + z^2 = (2\sqrt{13})^2$$

6) $\mathcal{E}_6 = \{M \in \mathcal{P} \text{ tel que le triangle ABM est isocèle en B}\}$.

AMB triangle isocèle en B, cela signifie que $BM = AB = 2\sqrt{13}$

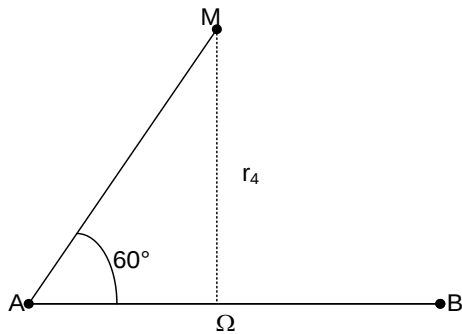
Donc $(\mathcal{E}_6)$ est une sphère de centre B, de rayon $r_2 = 2\sqrt{13}$ et ayant pour équation

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = (2\sqrt{13})^2$$

$$7) \mathcal{E}_7 = \{M \in \mathcal{P} \text{ tel que le triangle ABM est équilatéral}\}$$

Ici $AM=AB=BM$, donc $\mathcal{E}_7 = \mathcal{E}_5 \cap \mathcal{E}_6$.

Il s'agit donc d'un cercle de centre Ω et de rayon r_4 .



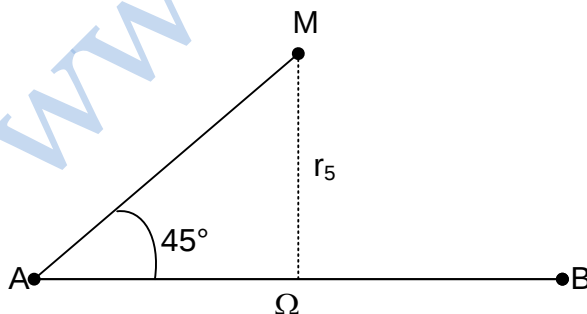
$$AM = AB, \sin 60^\circ = \frac{r_4}{AB} \Rightarrow r_4 = AB \sin 60^\circ = \sqrt{39}.$$

Donc $(\mathcal{E}_7)$ est le cercle de centre Ω et de rayon $r_4 = \sqrt{39}$

$$8) \mathcal{E}_8 = \mathcal{E}_3 \cap \mathcal{E}_4$$

$$\text{Ainsi définie, } \mathcal{E}_8 \text{ vérifie } \begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \sqrt{13} \\ 2x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$$

D'où $\mathcal{E}_8$ est un cercle de centre Ω et de rayon r_5 .



$$\tan 45^\circ = \frac{r_5}{A\Omega} = \frac{2r_5}{AB} \Rightarrow r_5 = \frac{AB}{2} \tan 45^\circ = \sqrt{13}.$$

Donc $(\mathcal{E}_8)$ est le cercle de centre Ω et de rayon $r_5 = \sqrt{13}$